8.4.3 Výpočty limit

Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ pak je konvergentní i posloupnost:

$(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$	a platí	$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$
$(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$	a platí	$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$
$(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$	a platí	$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

Jestliže posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ pak je konvergentní i posloupnost $(c \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde c je libovolné reálné číslo a platí $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$

Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ a přitom $b \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in N$ pak je konvergentní i posloupnost $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a platí $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Př. 1: Popiš běžnými slovy, význam a možné využití výše uvedených vět o posloupnostech.

Př. 2: Vypočti limity posloupností:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4^n}$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{3n}$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{2n^2}$

Př. 3: Vypočti limity posloupností:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2}{3n^2+2n}$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3-2n}$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+3}$

Př. 4: Rozhodni, kdy je aritmetická posloupnost $a_1;d$ konvergentní.

Př. 5: Rozhodni, kdy je geometrická posloupnost $a_1;q$ konvergentní.

Př. 6: Petáková:
strana 67/cvičení 8